Université Abdelmalek Essâadi
Faculté des Sciences
Tétouan

Année : 2007/2008
SMA-SMI

TD d'Eléctricité

Série n° 1

Exercice I :

Par utilisation de vecteur symbolique nabla :

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

vérifiez rapidement les relations suivantes :

- $\overrightarrow{grad}\, f_1 f_2 = f_1 \overrightarrow{grad}\, f_2 + f_2 \overrightarrow{grad}\, f_1$.
- $div\, \overrightarrow{grad}\, f = \Delta f$
- $div\, \overrightarrow{rot}\, \vec{a} = 0$
- $div(\Delta \vec{a}) = \Delta(div\, \vec{a})$
- $div(f\vec{a}) = \vec{a}.\overrightarrow{grad}\, f + f.div\, \vec{a}$
- $\overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{grad}\, f = 0$

$\vec{\nabla}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)$

Exercice II :

Un point $M(x,y,z)$ étant repéré par le rayon vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ de module $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

a) Calculer $\overrightarrow{grad}\, r$, $\overrightarrow{grad}\frac{1}{r}$ et $\overrightarrow{grad}\, U$ avec $U = 17x - \frac{2xy}{z} + y^2z^3$.

Montrer que $\overrightarrow{grad}\, U$ au point $M(2,0,-1)$ se trouve dans le plan xy.

Calculer le vecteur unitaire normal à la surface $S = 3x + 2xyz - z^2 - 2$ au point $(0,1,2)$.

b) Calculer $div\vec{r}$ et $div\vec{E}$ avec $\vec{E} = k\frac{\vec{r}}{r^3}$ et $k = c^{te}$.

$x + 4xy - 6$

Que peut-on dire du champ de vecteurs $\vec{E}$.

c) Calculer $\overrightarrow{rot}\, \vec{r}$ et $\overrightarrow{rot}\, \vec{A}$ avec $\vec{A} = 3x^2y\vec{i} - 2yz^3\vec{j} + x^2y\vec{k}$.

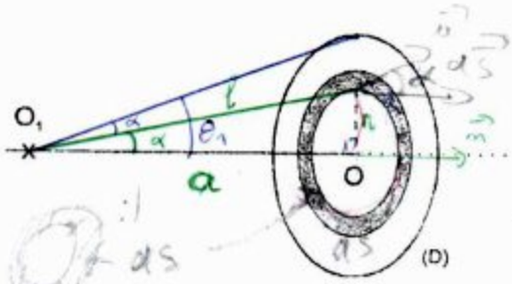
Donner la valeur de $\overrightarrow{rot}\, \vec{A}$ au point $M(1,2,1)$ et déterminer les points de l'espace où $\overrightarrow{rot}\, \vec{A}$ est nul.

Exercice III :

a) Qu. est l'angle solide $d\Omega$ sous lequel on voit une couronne élémentaire d'un disque (D), de puis un point O_1 de son axe.

b) Donner l'angle solide Ω_1 sous lequel on voit le disque (D) de puis le point O_1.

c) Donner l'angle solide sous lequel on voit le demi - espace et l'angle solide correspondant à la portion de l'espace ne contenant pas le disque.



$\cos\alpha = \frac{a}{l} \Leftrightarrow \boxed{a = \cos\alpha . l}$

$\tan\alpha = \frac{r}{a} \Leftrightarrow \boxed{r = a\, tg\alpha}$

$d\Omega = \frac{dS}{l^2}$

✧✧✧✧

ETUSUP .com

SÉRIE n° 1 d'

ELÉCTRICITÉ

EXERCICE 1

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

* $\vec{\nabla} f = \overrightarrow{grad}\, f$.
* $\overrightarrow{grad}\, f_1 f_2 = \vec{\nabla} f_1 f_2 = \frac{\partial f_1 f_2}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f_1 f_2}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f_1 f_2}{\partial z}\vec{k} = f_1 \vec{\nabla} f_2 + f_2 \vec{\nabla} f_1$

$$= \boxed{f_1\, \overrightarrow{grad}\, f_2 + f_2\, \overrightarrow{grad}\, f_1}$$

* $div\, \overrightarrow{rot}\, \vec{a} = 0$?

$$div\, \overrightarrow{rot}\, \vec{a} = \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \wedge \vec{a}}_{0}) = \boxed{0}$$

* $div\, \overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \boxed{\Delta f}$ $\quad \Delta = \nabla^2$
* $div\,(\Delta \vec{a}) = = \vec{\nabla}(\Delta \vec{a}) = \Delta(\vec{\nabla}\vec{a}) = \boxed{\Delta\, div\, \vec{a}}$
* $div\,(f\vec{a}) = \vec{\nabla} f \vec{a} = f\vec{\nabla}\vec{a} + \vec{a}\vec{\nabla} f = \boxed{f\, div\, \vec{a} + \vec{a}\, \overrightarrow{grad}\, f}$
* $\overrightarrow{rot}\, \overrightarrow{grad}\, f = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \boxed{0}$

EXERCICE 2

$\vec{r} = \vec{OM} = \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

(a) $\overrightarrow{grad}\, r = ?$

* $\overrightarrow{grad}\, r = \vec{\nabla} r = \frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial r}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$

$\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

On a : $\frac{\partial}{\partial x} r\vec{i} = \frac{x}{\underbrace{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}_{=r}}\vec{i} = \frac{x}{r}\vec{i} \rightarrow \overrightarrow{grad}\, r = \frac{1}{r} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$= \frac{\vec{r}}{r} = \boxed{\vec{u}}$

* $\overrightarrow{grad}\, \frac{1}{r} = \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z}\vec{k}$

Avec $\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} = \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-1}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = \boxed{\frac{-x}{r^3}}$

$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} = \left(\frac{1}{r}\right)'_r = \boxed{\frac{-1}{r^2}}$

Donc $\overrightarrow{grad}\, \frac{1}{r} = \frac{-1}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \boxed{\frac{-\vec{r}}{r^3}}$

* $\overrightarrow{grad}\, U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$ $\quad$ Avec $U = 17x - \frac{2xy}{z} + y^2 z^3$

$$\overrightarrow{grad}\, U = \left(17 - \frac{2y}{z}\right)\vec{i} + \left(-\frac{2x}{z} + 2yz^3\right)\vec{j} + \left(\overset{?}{+}\frac{2xy}{z^2} + 3(yz)^2\right)\vec{k}$$

Au point $M(2,0,-1)$

$$\overrightarrow{grad}\, U = (17-0)\vec{i} + \left(-\frac{2\times 2}{(-1)} + 2\times 0(-1)^3\right)\vec{j} + \left(\frac{2\times 2\times 0}{(-1)^2} + 3\times 0\times(-1)^2\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\, U = 17\vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}}$$

ETUSUP .com

On a $S = 3x + 2xyz - z^2 - 2$

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, S}{\|\text{grad}\, S\|} =$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, S = \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial x} = 3 + 2yz \\ \dfrac{\partial S}{\partial y} = 2xz \\ \dfrac{\partial S}{\partial z} = 2xy - 2z \end{cases}$$

$x = 0 \quad y = 1 \quad z = 2$

$\Leftrightarrow \; = 3 + 2\times 2 = 3 + 4 = 7\vec{i}$

$\Leftrightarrow \; = 2\times 0\times 2 = 0$

$= 2\times 0 - 2\times 2 = -4\vec{k}$

A v pt $(0,1,2)$

$$\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\, S}{\|\text{grad}\, S\|} = \frac{7\vec{i} - 4\vec{k}}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \frac{7\vec{i} - 4\vec{k}}{\sqrt{49 + 16}} = \boxed{\frac{7\vec{i} - 4\vec{k}}{\sqrt{65}}}$$

(b) * $\text{div}\, \vec{r} = \vec{\nabla}\, \vec{r} = \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial z}\vec{k}$

$$= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = \boxed{3}$$

* $\vec{E} = k\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ tq $k = cte \Leftrightarrow \vec{E} = \dfrac{k}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$

$$\text{div}\, \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{r^3}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{r^3}y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{r^3}z\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{r^3}x\right) = k\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) = k\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right)\right)$$

$$= k\left[(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} - \frac{3x}{2}(2x)(x^2+y^2+z^2)^{-5/2}\right]$$

$$= \frac{k}{r^3} - \frac{3x^2k}{r^5}$$

$$\Leftrightarrow \text{div}\, \vec{E} = \left(\frac{k}{r^3} - \frac{3kx^2}{r^5}\right) + \left(\frac{k}{r^3} - \frac{3y^2k}{r^5}\right) + \left(\frac{k}{r^3} - \frac{3kz^2}{r^5}\right)$$

$$= \frac{3k}{r^3} - \frac{3k(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = \frac{3k}{r^3} - \frac{3kr^2}{r^5}$$

$$= \frac{3k}{r^3} - \frac{3k}{r^3} = \boxed{0}$$

(c)

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{r} = \vec{\nabla} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \frac{\partial}{\partial x} & x \\ \vec{j} & \frac{\partial}{\partial y} & y \\ \vec{k} & \frac{\partial}{\partial z} & z \end{vmatrix} = \boxed{0}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y & -2yz^3 & x^2y \end{vmatrix} = \boxed{(x^2 + 6yz^2)\vec{i} + (-2xy)\vec{j} - 3x^2\vec{k}}$$

au pt $M(1,2,1)$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A} = 13\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

Déterminer les points de l'espace où $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{A}$ est nul.

$x^2 + 6yz^2 = 0$

$-2xy$

ETUSUP .com

$-2xy=0 \iff xy=0 \iff x=0$ et $y=0$

$3x^2=0 \iff x=0$ et $z=0$ avec Oz ou avec Oy

EXERCICE 3

$\boxed{tg'\alpha = 1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$

(a) $d\Omega = \frac{\vec{dS}\cdot\vec{u}}{\ell^2} = \frac{dS.\cos\alpha}{\ell^2}$ avec $dS = 2\pi r\, dr$

$\sim r^2 \approx$

et $\boxed{r = a\tan\alpha} \iff dr = a\frac{1}{\cos^2\alpha}d\alpha$

$\ell = \frac{a}{\cos\alpha} \iff \boxed{a = \ell.\cos\alpha}$

$d\Omega = \frac{\overbrace{2\pi r\, dr}^{dS}\cos\alpha}{\ell^2} = 2\pi a\, tg\alpha \frac{a}{\cos^2\alpha} d\alpha \frac{\cos^2\alpha}{a^2}.\cos\alpha$

$= 2\pi.\cancel{a^2}.tg\alpha.\cos\alpha.\frac{1}{\cancel{a^2}}$

$\boxed{\sin\alpha = tg\alpha.\cos\alpha}$

$\boxed{d\Omega = 2\pi\sin\alpha.d\alpha}$

(b) $\Omega_1 = \int_0^{\theta_1} d\Omega_1 = 2\pi\int_0^{\theta_1}\sin\alpha\, d\alpha = -2\pi[\cos\alpha]_0^{\theta_1}$

$= -2\pi(\cos\theta_1 - 1) = 2\pi(1-\cos\theta_1) \iff \boxed{\Omega_1 = 2\pi(1-\cos\theta_1)}$

(c) $\Omega_2 = 2\pi(1-\cos\frac{\pi}{2}) = \boxed{2\pi}$

$\Omega_3 = 4\pi - \Omega_1 = 4\pi - 2\pi(1-\cos\frac{\pi}{2}) = 2\pi(1+\cos\theta_1)$

$\boxed{\Omega_3 = 2\pi(1+\cos\theta_1)}$

ETUSUP .com

ETUSUP.com

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Diapo
Exercices
Livres
Contrôles Continus
Langues
MTU
Mécanique
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..

ETUSUP.com